

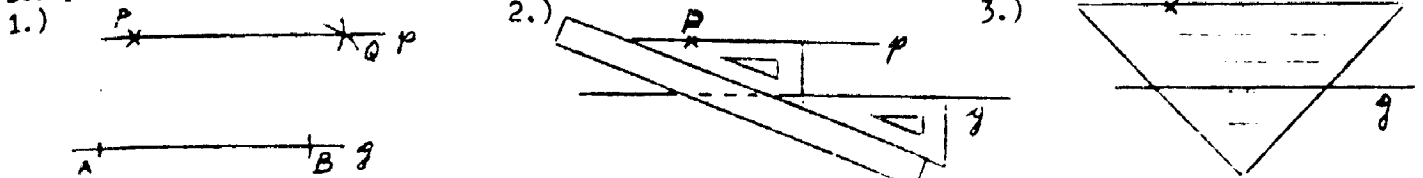
1. IN DER ZEICHNENDEN GEOMETRIE

1.1 Postulate der Konstruktion

Die konstruktive Lösbarkeit geometrischer Aufgaben hängt von der Erfüllung bestimmter Bedingungen ab. Theoretisch lassen sich diese als Postulate der Konstruktion formulieren, praktisch läuft dies darauf hinaus, a) die notwendigen bzw. zulässigen Werkzeuge anzugeben und b) die mit ihnen ausführbaren (erlaubten!) Grundoperationen (Tätigkeiten!) systematisch aufzuzählen.

ad a) : Traditionell wurden Konstruktionen nur mit Zirkel und Lineal ausgeführt ; heute Verwendung des Geodreieckes.

Beispiel : Parallele zur Geraden  $g$  durch den Punkt  $P$  auf 3 Arten :



Weitere Zeichengeräte sind Parallellineal, Einschiebelineal, Rechtwinkelhaken, Parallelwinkelhaken u.a.m.

ad b) : Als (erlaubte!) Grundkonstruktionen gelten (nach G.Loria) für die Ebene :

- .) Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade verbinden
- .) Den Schnittpunkt zweier Geraden finden
- .) Einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben ist
- .) Den Schnittpunkt einer Geraden und eines Kreises oder zweier Kreise finden.

Zu obigem Beispiel : Nur die 1. Art verbleibt innerhalb der erlaubten 4 Grundkonstruktionen.

"Je weniger Linien gezogen werden müssen, je weniger oft die Zeichengeräte gebraucht werden, desto genauer (und übersichtlicher) wird die Zeichnung".

1.2 Einfachheit geometrischer Konstruktionen

1.2.1 Der französische Geometer Emile Lemoine konnte durch Zergliederung von Konstruktionsaufgaben ein System angeben, in dem die Einfachheit einer Aufgabenlösung bewertet wird. Seine Bewertungsart nennt er Geometrographie.

E.Lemoine zählt in seiner Géométrie, 1892 in Paris erschienen, fünf Operationen beim Zeichnen mit Zirkel und Lineal auf :

R1 : Das Lineal wird an einen gegebenen Punkt angelegt

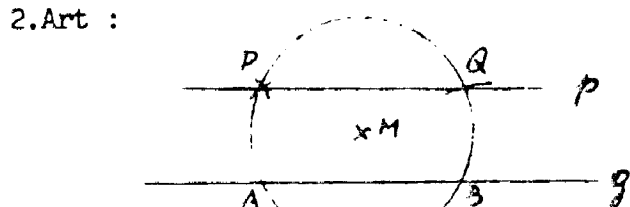
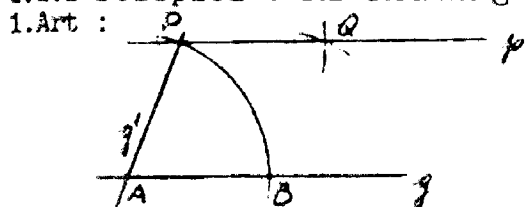
R2 : Am Lineal wird eine Gerade gezogen

C1 : In einem gegebenem Punkt wird eine Zirkelspitze eingesetzt

C2 : In einem beliebigen Punkt einer Linie wird eine Zirkelspitze eingesetzt

C3 : Es wird ein Kreis gezeichnet

1.2.2 Beispiel : Zur Geraden  $g$  ist durch den Punkt  $P$  die Parallele zu ziehen



Konstruktionsgang:

- .) durch P  $g'$   $\rightarrow A$
- .) Kreis(A,AP)  $\rightarrow B$
- .) Kreis(B,AP)
- .) Kreis(P,AP)  $\rightarrow Q$
- .)  $p$  durch P und Q

Bewertung:

- 1.R1 + 1.R2
- 2.C1 + 1.C3
- 1.C1 + 1.C3
- 1.C1 + 1.C3
- 2.R1 + 1.R2

Konstruktionsgang:

- .) M beliebig  $\rightarrow A, B$
- .)  $k_1(M,MP)$
- .) AP in den Zirkel
- .)  $k_2(B,AP) \rightarrow Q$
- .)  $p$  durch P u. Q

Bewertung:

- 1.C1 + 1.C3
- 2.C1
- 1.C1 + 1.C3
- 2.R1 + 1.R2

"Einfachheit" = 7 + 5 = 12

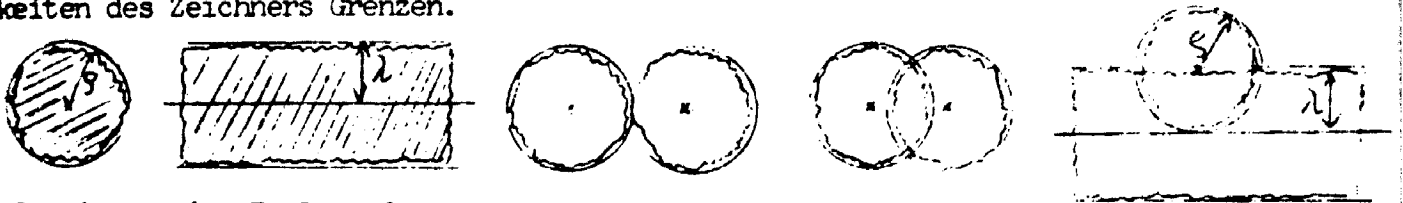
"Einfachheit" = 6 + 3 = 9

1.2.3 Geschichtliches : Die Geometrographie hat in der Zeitspanne von 1900 bis etwa 1930 viel dazu beigetragen, neuartige und einfachere Konstruktionen anstelle der traditionellen zu finden. So wurde der Einfachheitsgrad z.B. herabgesetzt : bei der stetigen Teilung von 29 auf 13 ; bei den 4 gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise von 92 auf 34 ; beim Apollonischen Problem von 356 auf 156 .

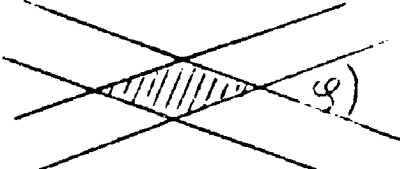
- 1.2.4 Kritik : .) geometrograph. Einfachheit bedeutet nicht leichtere Durchschaubarkeit  
 .) Lemoine setzt nur die Verwendung von Zirkel und Lineal ein  
 .) Lemoine wertet die fünf genannten Operationen alle gleich  
 .) Konstruktionen bei ungünstiger Lage ("in beschränkter Ebene") werden nicht berücksichtigt

### 1.3 Grundkonstruktionen mit Realpunkten und Realgeraden

Die endliche Ausdehnung von Realpunkten und Realgeraden setzt den Konstruktionsmöglichkeiten des Zeichners Grenzen.



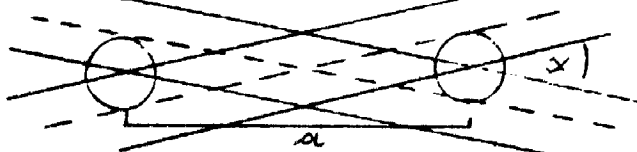
Schnitt zweier Realgeraden :



Die Überschneidungsfläche wird durch ein Parallelogramm (Raute) beschrieben.  
Der Flächeninhalt wird minimal für  $\varphi = 90^\circ$  ; er wird sehr groß für sehr kleine Schnittwinkel  $\varphi$  ("schleifen-der Schnitt").

- + ) Der Schnitt von Realgeraden ist umso besser (schlechter) bestimmt, je mehr sich der Schnittwinkel einem rechten Winkel ( $90^\circ$  ; "schleifen-der Schnitt") nähert.

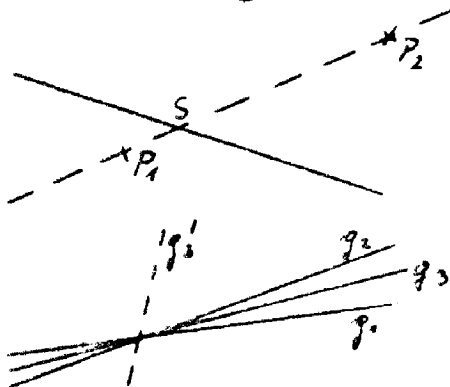
Verbindung von Realpunkten durch eine Realgerade:



Für große Entfernungen a wird  $\alpha$  klein.

- + ) Die Richtung der Realgeraden ist umso besser bestimmt, je weiter die Realpunkte auseinander liegen

Weitere Erfahrungen aus der Zeichenpraxis (nach Chr. Wiener, Lehrbuch d. DG, Leipzig, 1884):



- + ) Die Lage des Schnittpunktes S zweier Geraden ist umso genauer bestimmt, je näher die beiden Punkte, welche die Geraden bestimmen, bei dem Schnittpunkt liegen.  
 + ) Der Schnittpunkt zweier einander spitzwinklig schneidenden Geraden ( $g_1$  und  $g_2$ ) dient dennoch gut zur Bestimmung einer dritten Geraden ( $g_3$ ), wenn diese einen kleinen Winkel mit den ersten beiden Geraden bildet (nicht aber, wie  $g_3'$ , wenn sie nahe der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels liegt)!

- + ) Beim Arbeiten mit dem Zirkel soll die "in den Zirkel genommene Strecke" möglichst nicht größer sein als der Schenkel des Zirkels.

### 1.4 Konstruierbarkeit

Mit der Auswahl der Zeichengeräte und der Festsetzung der Grundkonstruktionen ist aufs engste verknüpft die Frage nach der Konstruierbarkeit eines geometrischen Problems. Fragen wie z.B. Dreiteilung des Winkels, Seite des einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 17-Ecks usw. beinhalteten früher als unausgesprochene Voraussetzungen : a) ausschließliche Verwendung von Zirkel und Lineal , b) es werden ideale Kreise und ideale Geraden in Betracht gezogen .

Dieser Präzisionsgeometrie ist beim tatsächlichen Zeichnen mit Realgeraden und Realpunkten eine Approximationsgeometrie (im Sinne von F.Klein) gegenüberzustellen.

		Präzisions- mathematik	Approximations- mathematik	Dispositions- mathematik
Algebra	Zahlen Rechen- verfahren	exakte Werte div. Lösungs- verfahren	Näherungswerte Näherungs- verfahren	grobe Abschätzung Überschlags- rechnung
zeichnende Geometrie	geometr. Figuren  Konstruk- tions- verfahren	idealisierte Figuren  K.gang mit idealen Geraden und Kreisen	konkrete Zeichnung  Z. mit Linien endlicher Stärke, Probiervverfahren Näherungskonstr.	Skizze  J. Steiner: "Konstruk- tionen bloß mittels der Zunge ausführen"
rechnende Geometrie (Maße, Tri- gonometrie analyt. G.)	Längenmaß Winkelmaß Winkelfkt.  Rechen- verfahren	Längen-Flächen- Rauminhaltsbe- rechnungen  Lösung von Gleich- ungssystemen	Berechnungen aus genäh- erten (Meß-)Werten  Fehlerfortpflan- zungsgesetz	grobe Abschätzung  Überschlags- rechnung

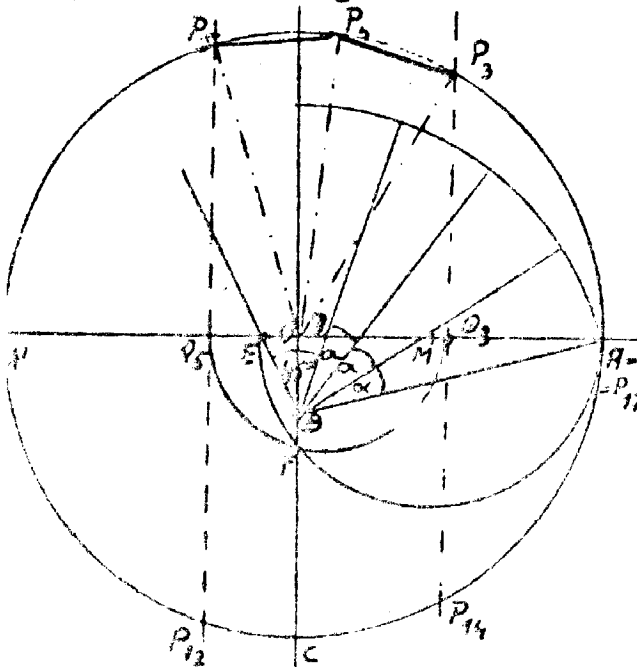
Beispiele zur Dispositionsgeometrie : Abschreiten einer Strecke ,  
Südrichtungsbestimmung mittels Uhr und Sonnenstand usw.

Gebiete der Approximationsgeometrie : Geodäsie , Astrometrie ; hier wird die  
Ausgleichsrechnung (mittl. Fehler, Methode d. kleinsten Quadrate) angewandt, auf die  
nicht eingegangen werden kann.

Die Fragen der Konstruierbarkeit lassen sich erörtern, wenn man die geometrischen Aussagen  
in algebraische transferiert. Algebraisch läßt sich die exakte Konstruktion mit Lineal  
und Zirkel auf die Auflösung einer Abfolge von linearen und quadratischen Gleichungen  
ausdrücken. Umgekehrt läßt sich ein algebraisches (d.h. in einer Gleichung dargestelltes)  
Problem nur dann geometrisch exakt mit Hilfe von Lineal und Zirkel lösen, wenn die  
Gleichung in einem Quadratwurzelkörper reduzibel ist, d.h. die Lösung sich durch  
eine Kombination (Schachtelung) von Quadratwurzeln angeben läßt. So ist z.B. die  
Seitenlänge des dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen Achteckes  $s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .

### 1.5 Konstruktion des regelmäßigen 17-Eckes als Beispiel zur Gegenüber- stellung von Präzisions- u. Approximationsgeometrie

#### 1.5.1 Präzisionsgeometrische Konstruktion (nach Richmond 1909)

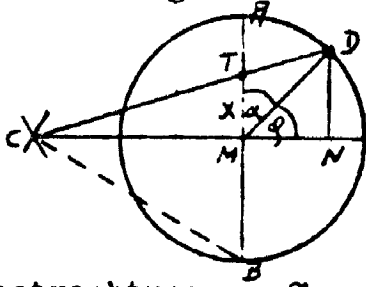


Konstruktionsgang :

- 1)  $OC \perp OA$
  - 2)  $|OB| = 1/4 \cdot |OC|$
  - 3)  $\alpha = 1/4 \cdot \angle OBA$
  - 4)  $3 \cdot \alpha \rightarrow D$
  - 5)  $3 \cdot \alpha + 45^\circ \rightarrow E$
  - 6) Halbkreis über EA schneidet OC in F
  - 7) Halbkreis (D,DF) schneidet AA' in Q3 und Q5
  - 8) Normalen in Q3 und Q5 schneiden den ursprünglichen Kreis in  $P_3, P_5, P_{12}, P_{14}$
  - 9) Winkelhalbierende von  $\angle P_5OP_3 \rightarrow P_4$
  - 10)  $|P_4P_4| = |P_4P_5| = s_{17}$
- $$\cos \frac{360^\circ}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

1. Eintragung im Math. Tagebuch von C.F. Gauß :  
Braunschweig, 30. März 1796 : "Grundlagen, auf die sich  
die Teilung des Kreises stützt, u. zw. dessen geometr.  
Teilbarkeit in siebzehn Teile usw."

1.5.2 Näherungskonstruktion (nach Antoine de Ville, 1628), auch für n-Ecke



Konstruktionsgang:

- 1) gleichseitiges Dreieck ABC über Durchmesser AB
- 2) Durchmesser in n (17) gleiche Teile geteilt; 2. Teilungspunkt =: T
- 3)  $\overline{CT}$  schneidet Kreis  $\rightarrow D$
- 4)  $\widehat{AD} \approx 1/n$  (1/17) des Umfanges

Fehlerbetrachtung : Ohne Einschränkung der Allgemeinheit : Einheitskreis !

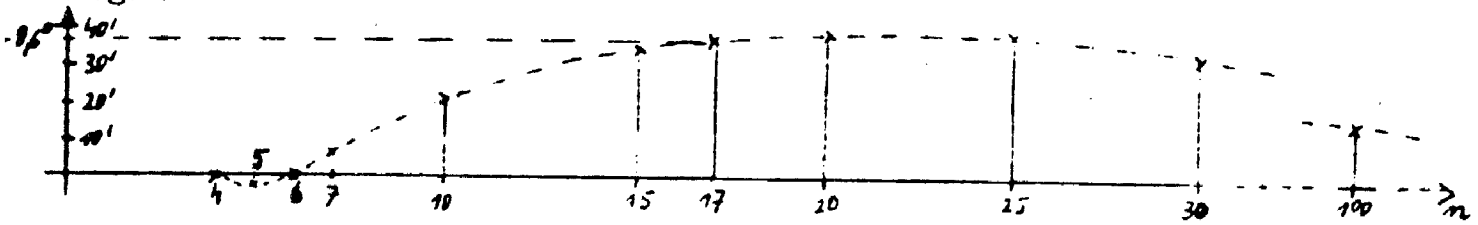
$MC = \sqrt{3}$  ;  $TM =: x$  ;  $MN = \cos \varphi$  ;  $DN = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$

Nach Strahlensatz ist  $CN : CM = DN : TM \Rightarrow (\sqrt{3} + \cos \varphi) : \sqrt{3} = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} : x \Rightarrow$

$\varphi(x) := \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{3+x^2} \cdot (\sqrt{3 - 2x^2} - x^2) \right)$  . Der Graph von  $\varphi(x)$  weicht von der Geraden  $y = \frac{\pi}{2} \cdot x$  nur geringfügig ab, daher als Fehlerfunktion  $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot x - \varphi(x)$  .

Jede Teilstrecke  $= \frac{AB}{n} = \frac{2}{n}$  ,  $TM = x = 1 - \frac{4}{n}$  (2. Teilungspunkt!)

Für den zur n-Eckseite  $AD$  gehörenden Zentriwinkel  $\alpha$  gilt  $\alpha(n) = \arccos AM - \arccos x = \varphi(1) - \varphi(1 - \frac{4}{n}) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 - (\frac{\pi}{2} \cdot (1 - \frac{4}{n}) - f(1 - \frac{4}{n})) = \frac{2 \cdot \pi}{n} + f(1 - \frac{4}{n})$  . Der absolute Fehler ist also  $f(1 - \frac{4}{n})$  . Im nachstehenden Graphen ist  $f(n)$  in Winkelminuten (!) aufgetragen.



1.5.3 Die Bestimmung der 17-Eckseite wurde als Beispiel gewählt, weil hier sowohl eine exakte als auch eine Näherungskonstruktion angegeben werden kann. Ein Vergleich der beiden Konstruktionen läßt wohl die Behauptung zu, daß es Fälle gibt, wo die zeichnerische Darstellung einer viele Schritte erforderlichen "exakten Konstruktion" ein schlechteres Zeichenresultat erbringt als die einer "Näherungskonstruktion".

1.6 Genauigkeit geometrischer Zeichnungen

Die Frage, mit welcher Genauigkeit man eine Gerade (einen Kreis) durch einen vorgegebenen Punkt hindurchzeichnen kann, wie genau ein Punkt als Schnittpunkt zweier Geraden oder Kreise bestimmt ist, usw., wurde von zwei Seiten her untersucht :

- a) experimentell bzw. aus der zeichnerischen Erfahrung
- b) mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. der Fehlertheorie

1.6.1 Aus der zeichnerischen Erfahrung

Abgesehen von den Fehlern aller praktischen Zeichengeräte, den objektiven Fehlern, entstehen beim Zeichnen durch den Zeichner auch noch subjektive Fehler. Diese subjektiven Fehler hat A. Mironowitsch in seiner Analyse der Genauigkeit graphischer Berechnungen, Leningrad 1950 untersucht. In der Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, S. 161 wird daraus u.a. angegeben :

- .) mittlerer Fehler beim Einstechen mit der Spitze eines Bleistiftes in einen gegebenen Punkt .... 0,08 mm
- .) mittlerer Fehler beim Einstechen mit der Spitze eines Bleistiftes in einem beliebigen Punkt einer Geraden .... 0,05 mm
- .) mittl. Fehler beim Ziehen einer Geraden durch einen Punkt ..... 0,08 mm
- .) mittlere Breite einer dünnen Linie .... 0,15 mm u.v.a.m

M. Dennert - K. Ilgner geben in Mathematik in der Schule 20(1952) S. 551 an : "Untersuchungen von Schülerzeichnungen ergaben eine durchschnittliche Strichbreite von 0,5 bis 0,6 mm für alle Linien".

Einige Genauigkeitswerte technischer Geräte :

Genauigkeit eines Plotters (in Abhängigkeit vom Preis (Herbst 1983!)):

0,1 mm bei ca. 20.000,- S

0,025 mm bei ca. 100.000,- S

0,0125 mm bei ca. 300.000,- S

Genauigkeit eines NC-scribers : 0,01 mm für alle Schriftgrößen .

### 1.6.2 Ansatz einer Fehlertheorie der zeichnenden Geometrie

In den bisher vorliegenden Versuchen zu einer Fehlertheorie der geom. Zeichnungen haben nur die subjektiven Fehler Berücksichtigung gefunden. Für die Zeichentätigkeit kann man (nach Lietzmann, Experimentelle Geometrie, Stuttgart 1959) folgende einfache Arten von Fehlerverteilungen (alles unter der Annahme einer Gauß-Verteilung!) anführen bzw. veranschaulichen (Abbildungen auf der letzten Seite!) :

- .) Einsetzen der Bleistiftspitze in einem gegebenen Punkt → "Fehlerhügel" mit Kreisen als Höhenlinien
- .) Anlegen eines Lineals an einen gegebenen Punkt → detto
- .) Erzeugen eines Punktes als Schnittpunkt zweier Geraden → "Fehlerhügel mit Ellipsen a.H.
- .) Einsetzen der Bleistiftspitze in einem beliebigen Punkt einer Geraden → "Fehlerdamm" mit Geraden als Höhenlinien
- .) Zeichnen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte → "Fehlerdamm" mit Hyperbeln a.H.

Dem Aufbau einer ganzen Theorie steht eine große Schwierigkeit entgegen : die Frage zu klären, wie sich die Fehler "addieren".

1. Beispiel: Um einen Punkt ist ein Kreis zu ziehen. Der Mittelpunkt besitzt einen Fehlerhügel mit kreisförmigen Höhenlinien; der Fehlerhügel der Kreislinie ist ein Damm, dessen Höhenlinien Kreise sind (Bild auf der letzten Seite). Wie aber, wenn der Mittelpunkt als Schnittpunkt entstanden ist, also ellipt. Höhenlinien hat ?

2. Beispiel: Durch zwei Schnitt-Punkte wird eine weitere Gerade bestimmt. Wie sieht deren Fehlerlandschaft aus ?

Es häufen sich also schon bei den allereinfachsten Konstruktionen die allergrößten Schwierigkeiten.

### 1.7 Math. Modellbildungen für die zeichnende Geometrie

Bei der Konstruktion eines mathem. Modells für die Spuren einer Zeichentätigkeit müssen die in 1.3 angeführten Fakten berücksichtigt werden. Zum Unterschied von der gewöhnlichen Elementargeometrie müssen gewisse Eindeutigkeitsforderungen aufgegeben werden :

- .) Zwei verschiedene Punkte bestimmen mindestens eine (Verbindungs)Gerade
  - .) Zwei verschiedene nichtparallele Gerade haben mindestens einen (Schnitt)Punkt gemeinsam
- Ferner ist zu unterscheiden zwischen benachbarten Punkten und solchen, die voneinander ferne liegen ; es ist zu unterscheiden zwischen benachbarten Geraden und solchen, welche sich kreuzen.

Mathematische Modellbildungen dieser Art wurden zuerst von Hjelmlev (1923 ff) untersucht. Später haben Klingenberg (1954 ff), Artmann (1969 ff) u.a. diese Probleme ("Geometrien mit Nachbarelementen") bearbeitet.

*Finsterwalder : " Zeichne so genau wie möglich , aber traue dem Resultat so wenig wie möglich " .*

### Literatur zum 1. Kapitel :

- Ch. Wiener, Lehrbuch d. Darst. Geometrie, Band 1, S. 190-191, Leipzig 1884
- W. Lietzmann, Experimentelle Geometrie, Stuttgart 1959
- K. Guldner, Näherungskonstruktionen regelmäßiger n-Ecke, Praxis d. Math. 3(1961), S. 288-291
- Zyklusopädie d. El. Math. Band IV, Berlin 1969
- W. L. Fischer (Erlangen), Wirklichkeitsgeometrie-Mathematische Geometrie, ZDM 1976, Heft 1, S. 20-25
- K. Nitz, Fehlertheorie d. geom. Konstruktionen, Z. f. Math. u. Ph. 53(1906), S. 1-37
- Handbuch der Schulmathematik Bd. III, Hannover, o.J.

## 2. GENAUIGKEIT BEI GEOMETRISCHEN BERECHNUNGEN

### 2.1 Maximaler absoluter und maximaler relativer Fehler

Angenommen sei der Fall, daß in einem Term drei Größen mit den wahren Werten  $x, y, z$  enthalten sind, deren absolute Fehler  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  sind. Der absolute Fehler des Terms

ist dann  $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$ . Falls  $f(x, y, z)$  stetige partielle Ableitungen hat, ist  $\Delta u = f_x(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \cdot \Delta x + f_y(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \cdot \Delta y + f_z(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) \cdot \Delta z$ , wo die  $\xi_1, \dots, \zeta_3$  bestimmte Werte in den Bereichen von  $x$  bis  $x+\Delta x$ , von  $y$  bis  $y+\Delta y$ , von  $z$  bis  $z+\Delta z$  sind. Wählt man diese Werte so, daß die Ableitungen den größten Wert in dem in Betracht kommenden Bereich haben und nimmt außerdem die Absolutbeträge, damit die einzelnen Glieder einander nicht aufheben, so ergibt sich als

maximaler Fehler des Terms  $\Delta u \leq |f_x| \cdot \Delta x + |f_y| \cdot \Delta y + |f_z| \cdot \Delta z$

Man erkennt sofort, daß sich diese Formel von drei auf  $n$  Größen ausdehnen läßt.

Aus dem absoluten Fehler findet man leicht den maximalen relativen Fehler  $\delta$ :

$$\delta = \left| \frac{f_x}{f} \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{f_y}{f} \right| \cdot \Delta y + \left| \frac{f_z}{f} \right| \cdot \Delta z$$

Zwei Beispiele: Beim Produkt  $a \cdot b \cdot c$  ist  $\delta = \left| \frac{bc}{abc} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{ac}{abc} \right| \cdot \Delta b + \left| \frac{ab}{abc} \right| \cdot \Delta c =$

$$= \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta c}{c} \right| ; \text{ beim Quotienten } (a/b) \text{ ist } \delta = \left| \frac{(1/b)}{(a/b)} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{(-a/b^2)}{(a/b)} \right| \cdot \Delta b = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

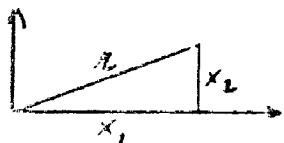
### 2.2 Fehlerrechnung als Differenzenrechnung

Pythagoräischer Lehrsatz  $(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 = (c + \Delta c)^2$

$a^2 + 2a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2 + b^2 + 2b \cdot \Delta b + (\Delta b)^2 = c^2 + 2c \cdot \Delta c + (\Delta c)^2$ . Da  $(\Delta a)^2, (\Delta b)^2$  und  $(\Delta c)^2$  gegenüber  $\Delta a, \Delta b$  und  $\Delta c$  vernachlässigt werden können und  $a^2 + b^2 = c^2$  subtrahiert werden kann, verbleibt nach Division durch 2 eine Relation zwischen den absoluten Fehlern der Dreieckseiten:  $a \cdot \Delta a + b \cdot \Delta b = c \cdot \Delta c$

Beispiel:  $a = 85 \pm 0,4 \text{ mm}$ ,  $b = 132 \pm 0,5 \text{ mm}$ ; exakt:  $c = \sqrt{85^2 + 132^2} = 157$   
 $85 \cdot 0,4 + 132 \cdot 0,5 = 157 \cdot \Delta c$ ;  $\Delta c = 0,6369 \dots$   $c = 157 \pm 0,6 \text{ mm}$

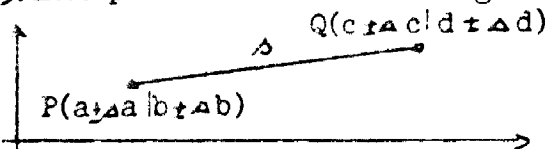
2. Interpretation: Einfluß kleiner Fehler der kartesischen Koordinaten auf den Polarabstand.



$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 ; (r + \Delta r)^2 = (x_1 + \Delta x_1)^2 + (x_2 + \Delta x_2)^2$$

$$r \cdot \Delta r = |x_1| \cdot \Delta x_1 + |x_2| \cdot \Delta x_2$$

3. Interpretation: Streckenlänge:  $s^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$



$$s \cdot \Delta s = |a-c| \cdot (|\Delta a| + |\Delta c|) + |b-d| \cdot (|\Delta b| + |\Delta d|)$$

Beispiel:  $a = 2 \pm 0,1$ ;  $b = 1 \pm 0,05$ ;  $c = 6 \pm 0,3$   
 $d = 4 \pm 0,2$

$$\Delta s = 0,8 \cdot (0,1+0,3) + 0,6 \cdot (0,05+0,2) = 0,47 \dots ; s = 5 \pm 0,5$$

### Genauigkeit einer Flächenmessung



$$A = a \cdot b$$

$$A \pm \Delta A = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b) = ab \pm a \cdot \Delta b \pm b \cdot \Delta a \pm \Delta a \cdot \Delta b$$

Vernachlässige

$$\Delta A = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$$

Für weitere Schlüsse müssen Annahmen für  $\Delta a$  und  $\Delta b$  gemacht werden:

I. Fall: Sei  $\Delta a = \Delta b = \text{konst} = c \Rightarrow \Delta A = a \cdot c + b \cdot c = (a+b) \cdot c$ . Der Fehler  $\Delta A$  ist proportional dem Umfang des Rechteckes ( $c = \text{Abmeßfehler}$ ).

Sei das Seitenverhältnis  $v = \frac{a}{b}$ , dann ist  $\left. \begin{matrix} a \cdot b = A \\ a/b = v \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = \sqrt{A \cdot v}, b = \sqrt{A/v}$

$$\Delta A = c \cdot (\sqrt{A \cdot v} + \sqrt{A/v}) = c \cdot \sqrt{A} \cdot (\sqrt{v} + 1/\sqrt{v})$$

Beispiel:  $A = 400 \text{ cm}^2$   
 $\sqrt{A} = 20 \text{ cm}$   
 $c = 0,02 \text{ cm}$  Abmeßfehler

$v=a/b$	1(Quadrat!)	2	5	10
$\Delta A$	0,80	0,85	1,07	1,39

II. Fall:  $\Delta a = k \cdot a, \Delta b = k \cdot b$   $\Delta A = a \cdot b \cdot k + b \cdot a \cdot k = 2 \cdot a \cdot b \cdot k$  d.h. der Fehler ist proportional dem Flächeninhalt des Rechteckes und unabhängig von Seitenverhältnis  $v = a/b$ .

III. Fall:  $\Delta a = k \cdot \sqrt{a}, \Delta b = k \cdot \sqrt{b}$ ; Die Längenfehler sind den Quadratwurzeln der Längen proportional, was bei unregelmäßigen Fehlerursachen zutrifft.

$$\Delta A = a \cdot k \cdot \sqrt{b} + b \cdot k \cdot \sqrt{a} = k \cdot (a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a}) = k \cdot \sqrt{ab} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

Mit  $v = a/b$  und  $A = a \cdot b$  ist  $\Delta A = k \cdot \sqrt{A} \cdot (\sqrt[4]{A \cdot v} + \sqrt[4]{A/v})$

Beispiel:  $A = 400 \text{ cm}^2$   
 $k = 0,004 \text{ cm}$

$v = a/b$	1(Quadrat!)	2	5	10
$\Delta A$	0,716	0,726	0,774	0,837

Hier wird  $\Delta A$  durch das Seitenverhältnis  $v = a/b$  im wesentlichen nicht beeinflusst.

### Genauigkeit eines Volumsberechnung

Volumen eines Kugelabschnittes  $= \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h) = \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot r \cdot h^2 - h^3)$

$$\Delta V = \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot (r + \Delta r) \cdot (h + \Delta h)^2 - (h + \Delta h)^3) - \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot r \cdot h^2 - h^3) = \dots = \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot h^2 \cdot \Delta r + 3h \cdot (2 \cdot r - h) \cdot \Delta h)$$

Beispiel:  $r = 8,4 \pm 0,2 \text{ cm}, h = 1,7 \pm 0,09 \text{ cm}$

Volumen  $V = \pi/3 \cdot 1,7^2 \cdot (3 \cdot 8,4 - 1,7) = 71,12 \dots \text{ cm}^3$

absoluter Fehler  $\Delta V = \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot 1,7^2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 1,7 \cdot (16,8 - 1,7) \cdot 0,09) = 9,074 \dots$

relativer Fehler  $\frac{\Delta V}{V} = 9,074 \dots / 71,12 \dots = 0,1276 \dots$

relativer Fehler unter Verwendung des linearen Anteils einer Taylorentwicklung:

$$\Delta V = \left| \frac{f_r}{f} \right| \cdot \Delta r + \left| \frac{f_h}{f} \right| \cdot \Delta h \quad ; \quad \frac{f_r}{f} = \frac{3 \cdot h^2}{3r h^2 - h^3} \quad ; \quad \frac{f_h}{f} = \frac{6rh - 3h^2}{3r h^2 - h^3}$$

$$\Delta V = \frac{1}{V} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot (3h^3 \cdot \Delta r + (6rh - 3h^2) \cdot \Delta h) = 0,1275 \dots \approx 13\%$$

### 2.3 Goniometrische Differenzenformeln

Wie verändern sich die Funktionswerte von  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ , wenn das Argument  $\alpha$  auf  $\alpha \pm \Delta \alpha$  abgeändert wird, bzw.  $\alpha$  den Fehler  $\Delta \alpha$  aufweist? Dabei soll  $\Delta \alpha$  stets so klein vorausgesetzt werden, daß für die verlangte Genauigkeit einer Rechnung

- 1)  $\sin \Delta \alpha = \tan \Delta \alpha = \text{arc } \Delta \alpha = \Delta \alpha \cdot \pi/180^\circ$  gesetzt werden kann
- 2) daß deren Potenzen und Produkte vernachlässigt werden dürfen und
- 3) daß  $\cos \Delta \alpha = 1$  gesetzt werden kann.

$$\sin(\alpha + \Delta \alpha) = \sin \alpha \cdot \frac{\cos \Delta \alpha}{\underset{=1 \text{ gesetzt}}{1}} + \cos \alpha \cdot \frac{\sin \Delta \alpha}{\underset{= \Delta \alpha \cdot \pi/180^\circ \text{ gesetzt}}{\Delta \alpha}}$$

somit  $\sin(\alpha \pm \Delta \alpha) = \sin \alpha \pm |\cos \alpha| \cdot (\Delta \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ})$

$$\cos(\alpha + \Delta \alpha) = \cos \alpha \cdot \frac{\cos \Delta \alpha}{1} - \sin \alpha \cdot \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta \alpha \cdot \pi/180^\circ}$$

also  $\cos(\alpha \pm \Delta \alpha) = \cos \alpha \mp |\sin \alpha| \cdot (\Delta \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ})$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \Delta\alpha) &= \frac{\tan \alpha + \tan \Delta\alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \Delta\alpha} \cdot \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \Delta\alpha}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \Delta\alpha} = \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \Delta\alpha + \tan^2 \alpha \cdot \tan \Delta\alpha + \tan \alpha \cdot \tan^2 \Delta\alpha}{1 - \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \Delta\alpha} = \tan \alpha + \\ &+ (1 + \tan^2 \alpha) \cdot (\Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ) = \tan \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \Delta\alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \end{aligned}$$

### 2.3.1 Anwendung auf sin- Satz

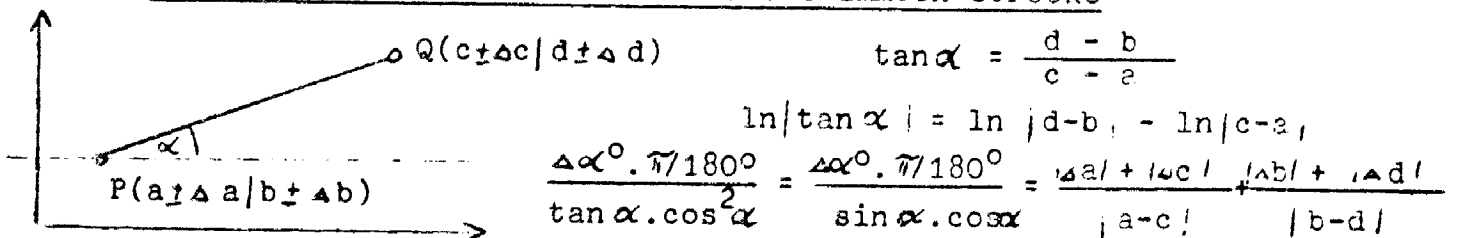
$$\begin{aligned} a \cdot \sin \beta &= b \cdot \sin \alpha \\ (a + \Delta a) \cdot \sin(\beta + \Delta\beta) &= (b + \Delta b) \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) \\ (a + \Delta a) \cdot (\sin \beta + \cos \beta \cdot \Delta\beta \cdot \pi / 180^\circ) &= (b + \Delta b) \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ) \\ a \cdot \sin \beta + a \cdot \cos \beta \cdot \Delta\beta \cdot \pi / 180^\circ &= \Delta b \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ \\ | : (a \cdot \sin \beta) & \quad | : (b \cdot \sin \alpha) \\ \frac{\Delta a}{a} + \cot \beta \cdot \Delta\beta \cdot \pi / 180^\circ &= \frac{\Delta b}{b} + \cot \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ \\ \text{daraus z.B. } \Delta\beta \cdot \pi / 180^\circ &= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \tan \beta \cdot \left( \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a} + \cot \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ \right) \end{aligned}$$

### 2.3.1 Anwendung auf cos-Satz

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ (a + \Delta a)^2 &= (b + \Delta b)^2 + (c + \Delta c)^2 - 2(b + \Delta b)(c + \Delta c) \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) \\ \text{Bei Vernachlässigung von } (\Delta a)^2, (\Delta b)^2, (\Delta c)^2 &\text{ folgt daraus} \\ a^2 + 2a \cdot \Delta a &= b^2 + 2b \cdot \Delta b + c^2 + 2c \cdot \Delta c - 2bc \cdot \cos \alpha - 2b \cdot \Delta c \cdot \cos \alpha - \\ &- 2c \cdot \Delta b \cdot \cos \alpha + 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ \\ a \cdot \Delta a &= b \cdot \Delta b + c \cdot \Delta c - b \cdot \Delta c \cdot \cos \alpha - c \cdot \Delta b \cdot \cos \alpha + b \cdot c \cdot \sin \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ \\ \Delta a &= \frac{1}{a} \cdot \left( (b - c \cdot \cos \alpha) \cdot \Delta b + (c - b \cdot \cos \alpha) \cdot \Delta c + b \cdot c \cdot \sin \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \pi / 180^\circ \right) \end{aligned}$$

## 2.4 Beispiele (mit Differenzieren!)

### 2.4.1 Anstieg einer durch zwei Punkte bestimmten Strecke



Mit  $s := PQ$  gilt  $\Delta \alpha \cdot \pi / 180^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \left( \left| \frac{\cos \alpha}{s} \right| \cdot (|\Delta c| + |c - a|) + \left| \frac{\sin \alpha}{s} \right| \cdot (|\Delta b| + |b - d|) \right)$

Für  $P(1 \pm 0,3 | 1 \pm 0,3)$ ,  $Q(5 \pm 0,4 | 4 \pm 0,4)$  ist  $s = 5$ ,  $\alpha = 36,87 \dots^\circ \approx 37^\circ$

$$\Delta \alpha \cdot \pi / 180^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \left( 0,16 \cdot (0,3 + 0,4) + 0,12 \cdot (0,3 + 0,4) \right) = 11,23 \dots^\circ \approx 11^\circ$$

Also  $\alpha \pm \Delta \alpha = 37 \pm 11^\circ \Rightarrow \alpha' = 48^\circ, \alpha'' = 26^\circ$

Probe:  $\tan \alpha' = \frac{3,6 - 1,3}{5,4 - 0,7} = 0,49 \dots \alpha' = 26^\circ$

$\tan \alpha'' = \frac{4,4 - 0,7}{4,6 - 1,3} = 1,12 \dots \alpha'' = 48^\circ$



### 2.4.2 Prozentualer Fehler des Flächeninhalts eines Dreiecks

Gegeben: Seite a auf 1% genau, Seite b auf 2% genau,  $\Delta\gamma = 0,25^\circ$

Fläche  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ ; relativer Fehler (des Produktes!)  $\delta = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + |\cot \gamma| \cdot \Delta\gamma \cdot \frac{\pi}{180}$

Prozentualer Fehler  $= 100\delta = 100 \cdot \frac{\Delta A}{A} = 100 \cdot (0,01 + 0,02 + |\cot \gamma| \cdot 0,25 \cdot \frac{\pi}{180}) =$

$= 3 + 0,4 \cdot |\cot \gamma|$ . Beim rechtwinkligen Dreieck ( $\gamma = 90^\circ$ ) ist der Fehler am kleinsten.

### 2.4.3 Beispiel einer Rückwärtsanalyse

Die Gleichung  $b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$  sei gegeben. Welche Größe der absoluten Fehler in den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  sind zulässig ( $\alpha \approx 45^\circ$ ,  $\beta \approx 30^\circ$ ; der Fehler von c sei vernachlässigbar klein), daß der relative Fehler in b kleiner als 2% bleibt?

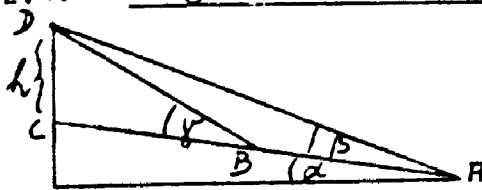
Wir nehmen an:  $\Delta\alpha = \Delta\beta < \epsilon$ .  $\ln b = \ln c + \ln|\sin \beta| - \ln|\sin(\alpha + \beta)|$

$\frac{\Delta b}{b} \approx \frac{\Delta c}{c} + \cot \beta \cdot \Delta\beta - |\cot(\alpha + \beta)| \cdot (\Delta\alpha + \Delta\beta)$

$|\frac{\Delta b}{b}| \approx |\frac{\Delta c}{c}| + |\cot \beta - \cot(\alpha + \beta)| \cdot |\Delta\beta| + |\cot(\alpha + \beta)| \cdot |\Delta\alpha|$   
 $= 0 \text{ nach V. } \sqrt{3} \approx 0,268.. \quad 0,268..$

$(|3 - 0,268| + 0,268) \cdot \epsilon \cdot \frac{\pi}{180} \leq 0,02$ , also  $\Delta\alpha < \epsilon \leq 0,7$  bzw.  $\Delta\beta < \epsilon \leq 0,7$

### 2.4.4 Länge einer vertikalen Strecke



$|\overline{AB}| = s = 4,5(\pm 0,02) \text{ m}$ ,  $\alpha = 7,4(\pm 0,2)^\circ$ ,

$\beta = 3,8(\pm 0,1)^\circ$ ,  $\gamma = 4,3(\pm 0,1)^\circ$

$|\overline{CD}| = h = \frac{s \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta) \cdot \cos \alpha} = 2,6... \text{ m}$

$\frac{\Delta h}{h} = |\frac{\Delta s}{s}| + \left| \frac{\sin \gamma \cdot \Delta\beta \cdot \pi}{\sin \beta \cdot \sin(\gamma - \beta) \cdot 180} \right| + \left| - \frac{\sin \beta \cdot \Delta\gamma \cdot \pi}{\sin \gamma \cdot \sin(\gamma - \beta) \cdot 180} \right| + \left| \tan \alpha \cdot \Delta\alpha \cdot \frac{\pi}{180} \right| =$   
 $= 0,408... \approx 41\%$ ;  $\Delta h = h \cdot 0,408... \approx 1,0... \text{ m}$

### 2.5 Ortslinien gleicher Genauigkeit

Als Genauigkeitsmaß für Ergebnisse von Beobachtungsreihen wird in der Fehler- und Ausgleichsrechnung u.a. der mittlere Fehler m verwendet.

Für n = Anzahl der Beobachtungen und  $\epsilon_i$  wahrer Fehler d. Einzelmessung ist  $m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}$

Die Genauigkeit der Lage eines Punktes in einer Ebene kann aus den mittleren Fehlern  $m_x$  und  $m_y$  in den Koordinaten x und y durch  $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$  charakterisiert werden (invariant gegenüber Drehung des Koordinatensystems!).

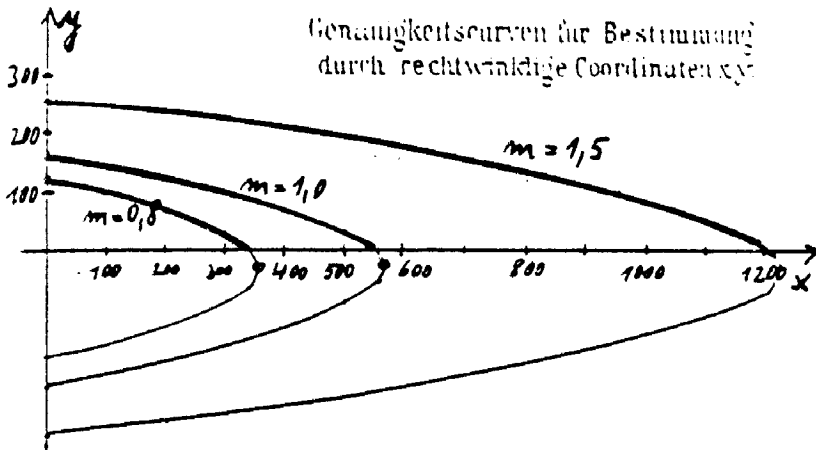
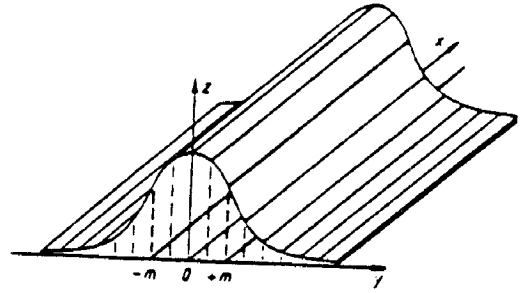
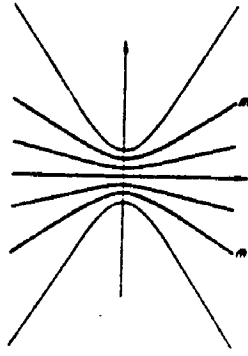
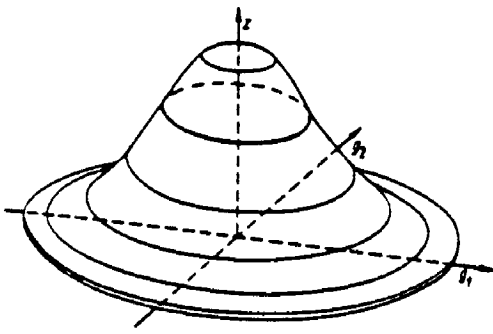
W. Jordan (Über die Genauigkeit einfacher geodätischer Operationen, Z.f. Math. u. Ph. 16(1871), S. 397-425) hat für einige Standardaufgaben der Vermessungskunde (Koordinatenwerte eines Punktes, Vorwärtseinschneiden, Rückwärtseinschneiden, Snellius-(Pothot-)Aufgabe) Ortslinien gleicher Genauigkeit (= gleicher m-Werte) unter der Annahme  $\Delta x = k \cdot \sqrt{x}$ ,  $\Delta y = k \cdot \sqrt{y}$  durchgerechnet (3 Abbildungen auf der letzten Seite!).

Übungsmaterial kann aus sehr vielen Lehrbuchaufgaben durch Vorgabe von Genauigkeitsintervallen erstellt werden. Durchrechnungen mit kleinst- und größtmöglichen Eingangsdaten bieten Beispiele für lineare (= unverzweigte) Programme der EDV.

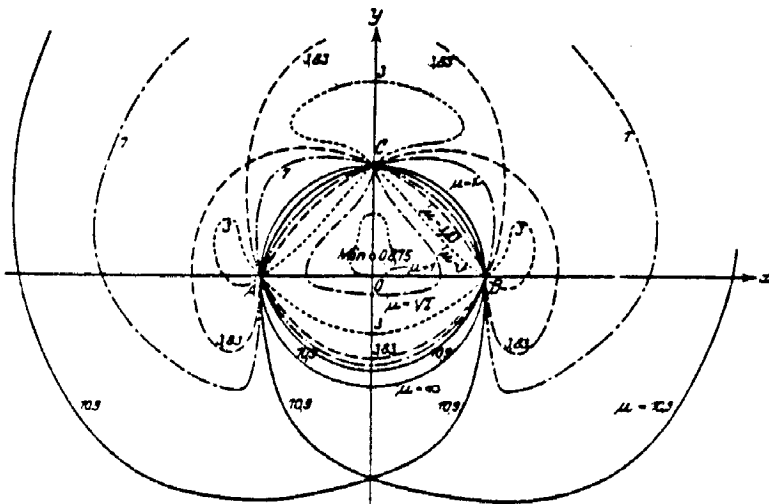
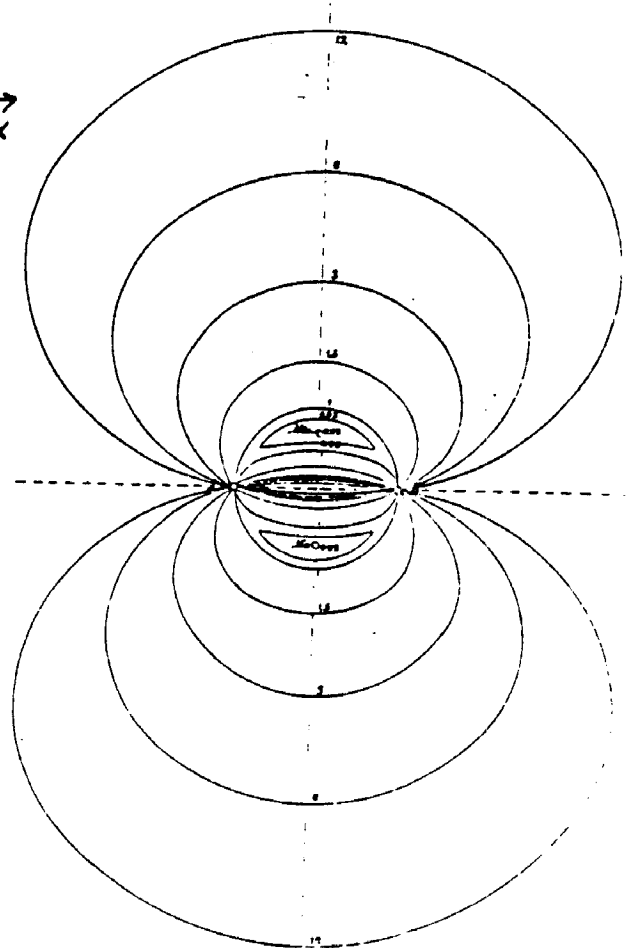
Literatur zum 2. Kapitel:

Lambacher-Schweizer, Analysis, Stuttgart 1968  
 Hammer, Trigonometrie, Stuttgart 1923  
 Sigl, Ebene u. sph. Trigonometrie, Frankfurt/M. 1969  
 Jordan-Eggert-Knéssl, Handbuch der Vermessungskunde, Band 2, Stuttgart 1963  
 Rothe, Höh. Mathematik, Teil IV, Heft 1/2, Stuttgart 1957  
 H. Hering, Wie reagiert eine Funktion auf additive Änderungen des Arguments, MU 28 (1982), Heft 3, S. 50-66

30



Genauigkeitscurven für Vorwärts geschichtet gemessen PAB und BPA



Genauigkeitscurven für Polkoordinaten Bestimmung Gemessen APB und BPC